## **培优课19 圆锥曲线中的求值、证明、探索性问题**

### **培优点一 求值问题**

#### **审题指导**

典例1 [2024·广东模拟]设椭圆方程为，（审题①由左、右顶点可得的值）分别是椭圆的左、右顶点，直线过点，当直线经过点时，（审题②相切，得到的值）.

（1）求椭圆的方程.

（2）若直线与椭圆交于，（（审题③直线的斜率不为0，可设）两点.

①求直线（审题④由斜率之积的式子，联想到韦达定理）；

②若直线（审题⑤由，，的斜率关系转化求解），求直线的方程.

**解题观摩**

[解析]（1），…………审题①

当直线经过点时，的方程为，

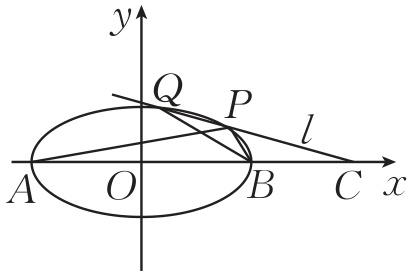
代入，整理得，

，…………审题②

解得，所以椭圆的方程为.

（2）①，…………审题③

如图，设，，.



由得，则

则，…………审题④

.

② ，…………审题⑤

又因为，所以，则直线的方程为，

与联立得,所以的方程为，即.

#### **通性通法**

在解析几何的学习中，离不开求“角度、距离、面积、比值”等量，最直接的办法就是把这些量表示出来，这就常常需要将直线的方程与圆锥曲线的方程联立，用韦达定理将所求问题或题中的关系转化为，（或，）的形式求解.

#### **培优训练**

##### **从求直线方程变到求角度设问变式**

[2024·成都模拟]已知椭圆的右焦点为，是椭圆上异于左、右顶点，的任意一点，且直线与直线的斜率之积为.

（1） 求椭圆的标准方程；

[解析]设，，由已知得，，，

因为直线与直线的斜率之积为，所以，所以，又因为，，所以，，故椭圆的标准方程为.

（2） 若直线与直线相交于点，且是线段的中点，，求的大小.

[解析]设直线的方程为，.

由得.

因为是线段的中点，，所以，不妨设.

又，，

所以，解得.

由得，解得或（舍去），则，所以，故.

由椭圆的对称性可知，当时，也有.

故.

### **培优点二 证明问题**

#### **审题指导**

典例2 [2024·邯郸模拟]已知双曲线过，，（审题①两点关于轴对称，可判断这两点在曲线上）四个点中的三个点.

（1）求双曲线的方程；

（2）若（审题②要讨论直线的斜率是否存在），（审题③得到），求证：（审题③直线，找到，之间的代数式关系），并求出该定点的坐标.

**解题观摩**

[解析]（1）根据双曲线的对称性可知，，…………审题①

所以,同时在双曲线上，而不可能在双曲线上,

则双曲线还经过点，则，将点代入，可得,

所以双曲线的方程为

（2），…………审题②

设直线的方程为，，，

联立整理得.

由得

且，.

因为，所以，.

，…………审题③

即，所以，

即，

所以，

化简得，即，…………审题④

所以或，且均满足（\*）.

当时，直线的方程为，

直线过定点，即点，不符合题意，舍去；

当时，直线的方程为，

直线过定点，符合题意.

（ⅱ）当直线的斜率不存在时，设的方程为，由解得

因为，，所以，即，

所以，即，

解得（舍去）或，所以直线的方程为，直线过点.综上所述，直线经过一个不在双曲线上的定点，定点的坐标为.

#### **通性通法**

**几何证明问题的解题策略**

1.圆锥曲线中的证明问题,主要有两类：一是证明点、直线、曲线等几何元素中的位置关系,如某点在某直线上、某直线经过某个点、某两条直线平行或垂直等;二是证明直线与圆锥曲线中的一些数量关系（相等或不相等）.

2.解决证明问题时,主要根据直线、圆锥曲线的性质,直线与圆锥曲线的位置关系等,通过相关的性质应用、代数式的恒等变形以及数值计算等进行证明.

#### **培优训练**

##### **从证明过定点变为证明三点共线设问变式**

[2021·新高考Ⅱ卷]已知椭圆的方程为,右焦点为,且离心率为.

（1） 求椭圆的方程.

[解析]由题意知,椭圆的半焦距,且,所以.又,所以椭圆方程为.

（2） 设,是椭圆上的两点,直线与曲线相切.证明：,,三点共线的充要条件是.

[解析]由（1）得,曲线方程为,

当直线的斜率不存在时,直线的方程为,不合题意;

当直线的斜率存在时,设,.

证必要性：若,,三点共线,

则可设直线的方程为,即.

由直线与曲线相切可得,解得.

联立可得,

所以,,

所以,故必要性成立.

证充分性：设直线的方程为,即,

由直线与曲线相切,得,

所以,

联立可得,

所以,,

所以

,

化简得,所以,所以或

所以直线的方程为或,

所以直线过点,即,,三点共线,故充分性成立.

故,,三点共线的充要条件是.

### **培优点三 探索性问题**

#### **审题指导**

典例3 [2024·聊城模拟]已知为双曲线右支上除右顶点外的任意点，（审题①一条渐近线的斜率为）.

（1）求证：（审题②点在曲线上，可设点的坐标，从而表示点到直线的距离）.

（2）已知的左顶点和右焦点，（审题③要讨论是否是的中点）.试问是否存在常数 ，（审题④找到，分别与哪条直线的倾斜角相等或互补）？若存在，请求出 的值；若不存在，请说明理由.

**解题观摩**

[解析]（1）因为双曲线的一条渐近线与直线互相垂直，，…………审题①

则，则，所以双曲线的方程为.

设点的坐标为，则，即.

双曲线的两条渐近线，的方程分别为,，则点到两条渐近线的距离分别为，…………审题②

则，

所以点到双曲线的两条渐近线的距离之积为定值.

（2）存在. ①当时，，，…………审题③

所以 ，所以，此时.

②当时,

（ⅰ）当在轴上方时，由,，可得，

所以直线的方程为，

把代入得，

所以，.…………审题④

由二倍角公式，可得.

因为直线的斜率及，

所以，则.

因为,，所以

当在轴下方时，同理可得.故存在，使得.

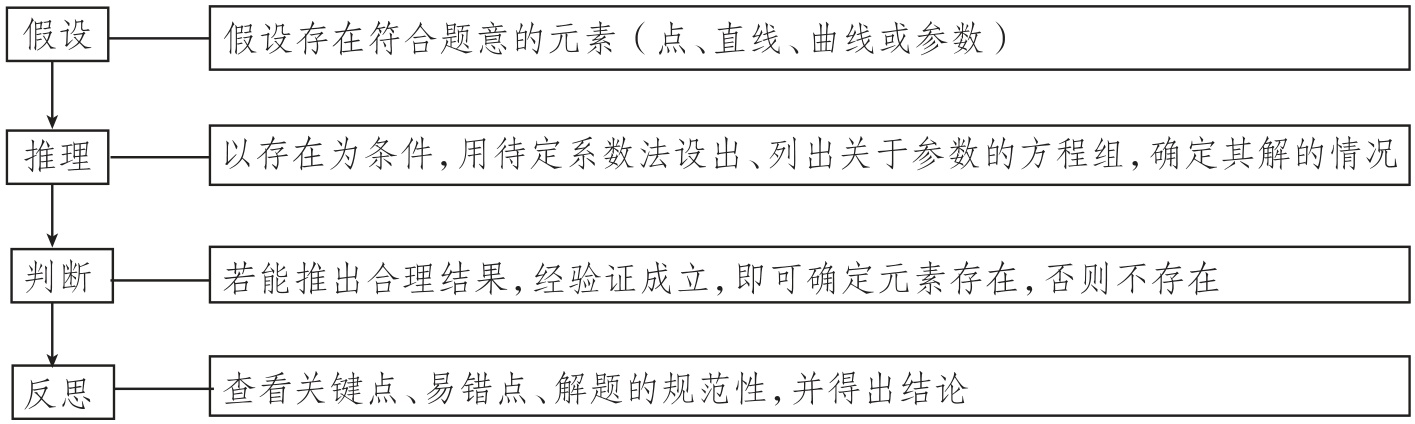
#### **通性通法**

**圆锥曲线中的探索性问题**

1.圆锥曲线中的探索性问题一般分为探索条件、探索结论两种.若探索条件，则可先假设条件成立，再验证结论是否成立，成立则存在，否则不存在;若探索结论，则应先求出结论的表达式，再对其表达式解析讨论，往往涉及对参数的讨论.

2.圆锥曲线的探索性问题主要体现在以下几个方面：①探索点是否存在;②探索曲线是否存在;③探索命题是否成立.解决此类问题通常采用“肯定顺推法”，将不确定性问题明朗化.其步骤为假设满足条件的元素（点、直线、曲线或参数）存在，用待定系数法设出，列出关于待定系数的方程组，若方程组有实数解，则元素（点、直线、曲线或参数）存在,否则元素（点、直线、曲线或参数）不存在.反证法与验证法也是求解探索性问题常用的方法.

3.解决探索性问题的流程：



#### **培优训练**

##### **从角度探究变为定值探究设问变式**

[2024·茂名模拟]已知，分别为双曲线的左、右焦点，为渐近线上一点，且，.

（1） 求双曲线的离心率.

[解析]由，可设，，

在中，因为，

所以，

即，

所以，即为直角三角形，

所以在为坐标原点中，，，，所以，则双曲线的离心率.

（2） 若双曲线的实轴长为2，过点且斜率为的直线交双曲线的右支于不同的，两点，为轴上一点且满足，试探究是否为定值.若是，则求出该定值；若不是，请说明理由.

[解析]由（1）可知在双曲线中有且实轴长为2，

所以，,所以双曲线的方程为.

由于，故设直线的方程为，

联立可得，

因为直线与双曲线右支交于不同的两点，

所以解得.

设，，则，，

则，，

即的中点坐标为.

因为为轴上一点，满足，所以为的垂直平分线与轴的交点，

则的垂直平分线的方程为，

令，则，即，

所以，

又

，

且，在双曲线的右支上，所以，，所以，

即，

故，

即为定值，定值为2.